UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS YTECNOLOGÍA

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

INVOLUCIÓN SOBRE CUATERNIONES

POR

OSCAR A RUBATTINO M

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS
PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA PURA

PANAMÁ REPUBLICA DE PANAMÁ

2009

UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y TECNOLOGÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMATICA

Título de la Tesis *INVOLUCION SOBRE CUATERNIONES*

Nombre del Estudiante *OSCAR A RUBATINO M* Cédula N 4 166 324

APROBADO POR

Doctor Jaime Gutiérrez
Presidente

Magister Elmir De Carvalho
Miembro

Magister Julio A Vallarino R
Miembro

REFRENDADO POR

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA
DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

Fecha ______________________

Obsequio del autor

198

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi esposa hijos y muy especialmente a mi madre Haydee Mojica (q e p d) fuentes de inspiración para lograr esta meta a mis hermanas amigos y a todas aquellas personas que de una forma u otra me brindaron su apoyo en todo momento

AGRADECIMIENTO

Quiero en primera instancia agradecer a Dios todopoderoso quien me permitio concluir esta meta Agradezco también de forma muy especial al profesor asesor Dr Jaime Gutiérrez por su paciencia y su siempre acertada guia para la culminacion de este trabajo Igualmente agradezco a mis amigos Eric Acevedo y Pedro Salamanca quienes siempre me brindaron su apoyo

INDICE GENERAL

RESUMEN

En este trabajo de graduacion presentamos una breve resena histórica de los cuaterniones Además se presentan las propiedades básicas de ellos y de las involuciones sobre cuaterniones Finalmente estudiamos los sistemas de funciones lineales de cuaterniones

SUMMARY

In this work of graduation we present a brief historical review of the quaternions Besides the basic properties appear of them and of the involutions on quaternions Finally we study the systems of linear functions of quaternions

INTRODUCCIÓN

En este trabajo abordamos el tema del desarrollo histórico de los cuaterniones ubicándonos inicialmente en como estos surgieron a través del estudio de los numeros complejos con los trabajos realizados por Sir William R Hamilton

Ademas presentamos formalmente al cuerpo no conmutativo de los cuaterniones su representación matricial y luego un estudio sobre las involuciones sus propiedades básicas y la proyección vectorial

Por ultimo abordaremos la reducción y manipulación de sistemas de funciones lineales de cuaterniones Para este fin se probarán dos resultados importantes el primero es que aun cuando una función general de cuaternión lineal posea un numero arbitrario de términos siempre podemos reducirla a una forma 4-tupla de cuaterniones y el segundo que las combinaciones en series (composición de cascada) y paralelo (suma ponderada) de tales funciones canónicas pueden escribirse directamente en forma canónica

CAPÍTULO I

RESEÑA HISTÓRICA DE LOS CUATERNIONES

En este capitulo abordamos el tema del desarrollo historico de los cuaterniones ubicándonos inicialmente en como estos surgieron en el estudio de los numeros complejos

Finalizamos este primer capitulo con los trabajos realizados por Sir William R Hamilton que lo llevaron al descubrimiento de los cuaterniones

1 1 Reseña Histórica de los Cuaterniones

Inicialmente los numeros complejos evolucionaron durante un largo período por la influencia de diferentes culturas como la Babilónica a través de las tablillas de arcilla donde se sabe que esta extraordinaria civilización conocía la ecuación de segundo grado pero como no conocían el concepto de numero negativo no consideraban soluciones negativas ni imaginarias

En la evolución del pensamiento matemático se puso de manifiesto el valor práctico de solución de ecuaciones mediante la radicacion que condujo cuando las ecuaciones eran de grado par a la aparición de cantidades contra las cuales se rebelo el sentido comun llamándolas numeros imaginarios abriendo en este sentido un nuevo campo en las investigaciones matematicas

Veremos a continuación los aportes que realizaron algunos matemáticos en el estudio y desarrollo de los cuaterniones cuando hacían sus investigaciones sobre los complejos (la naturaleza de cantidades negativas)

Tres algebristas italianos en el siglo XVI sobresalen en el desarrollo de los numeros complejos tratando de ampliar este campo matemático Nicolo

Fontana quien en 1535 resuelve todo tipo de cubicos G Cardano quien en 1545 en su Ars Magna consideraba a los imaginarios de la forma $a+\sqrt{-b}$ al determinar soluciones de ecuaciones polinomiales cubicas y cuarticas y Rafael Bombelli quien en 1572 es el primero en trabajar con expresiones de la forma $a+b\sqrt{-1}$

En su famoso tratado Discours de la Méthode en 1637 Rene Descartes introduce el término imaginario para expresiones que envolvian raíces cuadradas de numeros negativos Además preparó el camino hacia la abstracción y generalización

Leonhard Euler en 1777 usa el símbolo i por primera vez para representar $\sqrt{-1}$ Esta representación aparece impresa en 1794 y es aceptada ampliamente por el uso que de ella hace Gauss en su obra Disquisitones Arithmeticae de 1808 donde además representa el numero $a+b\,i$ mediante las coordenadas $(a\ b)$ de un punto en el plano real lo cual implica una relacion directa entre los numeros de la forma $a+bi$ con los ejes coordenados a través de las parejas de numeros reales $(a\ b)$

El camino hacia la abstracción se empezó a construir entre 1830 y 1850 con los trabajos de G Peacock A De Morgan y Duncan F Gregory's acerca de sus reflexiones sobre la naturaleza de los numeros imaginarios

A. De Morgan se acerca a la noción moderna de matemática como proposiciones funcionales relacionando las reglas de números reales y numeros complejos sin embargo **rechaza la posibilidad de desarrollar algebras triples o cuádruples**

Para 1831 Cauchy formula un álgebra rigurosa de numeros complejos basada en la geometría del plano complejo Ese mismo año Gauss expone en su teoría Aritmética de numeros complejos las propiedades de los numeros de la forma $a + bi$ llamados ahora numeros de Gauss y la representación geométrica de los mismos De esta forma inicia un desarrollo sostenido de la teoria de funciones complejas junto a grandes matemáticos como Hamilton Cayley Grassmann y otros

Hasta aquí matemáticos como Cauchy Grassman Gauss y otros habian llegado Sin embargo el pensamiento matemático de la epoca se debatía en sí era posible introducir otra ampliación más en el espacio de numeros hipercomplejos de la forma $a + b\,i + c\,j$

1 2 Los trabajos de William R Hamilton sobre los cuaterniones

El interés de Hamilton en el álgebra fue despertado alrededor de 1826 por su amigo John Graves cuando Hamilton trabajaba en el estudio de la óptica Graves intentaba definir logaritmos para numeros negativos y complejos y regularmente se escribía con Hamilton acerca de este problema

Hamilton no estaba satisfecho con una representación geométrica de un sistema de numeros los cuales según el eran dominio del álgebra y objetó en particular la dependencia de una representación geométrica sobre un plano coordenado

Así mismo no compartía la idea con la representación de los numeros complejos como expresiones de la forma $a + b\,\iota$

Todo esto lo llevó a definir numeros complejos como pares ordenados de numeros reales Hacia 1833 escribió el símbolo $\sqrt{-1}$ es absurdo y denota una operacion imposible [ ] pero en la teoría de cuplas el mismo símbolo $\sqrt{-1}$ es significativo y denota una extraccion posible o una raíz cuadrada de la cupla $(-1\ 0)$

De esta manera el define el numero complejo $a + b\iota$ como un punto $(a\ b)$ en el plano $\mathbb{R}^2$ como hacemos hoy dia Por tanto para Hamilton el numero imaginario $b\iota$ era simplemente el punto $(0\ b)$ del eje y

Una de las primeras hazañas de Hamilton fue legitimizar en 1835 el uso tradicional de los numeros complejos en matematica (dando una estructura algebraica al plano $\mathbb{R}^2$ lo cual se corresponde con la del conjunto $\mathbb{C}$ de los numeros complejos y define las cuatro operaciones sobre parejas como hacemos hoy en dia además mostró que dadas estas operaciones las cuplas de numeros satisfacen las leyes de un campo las leyes conmutativas y distributiva están dadas (pero no la ley asociativa) así como las leyes de clausura inverso aditivo y multiplicativo y la existencia del elemento cero

Hamilton define las 4 operaciones de acuerdo con las siguientes reglas

$$(a\ \ b) \pm (c\ \ d) = (a \pm c\ \ b \pm d)$$

$$(a\ \ b)\,(c\ \ d) = (a\,c - b\,d\ \ ad + bc)$$

$$\frac{(a\,,b)}{(c\ \ d)} = \left(\frac{a\,c+b\,d}{c^2+d^2}\quad \frac{b\,c-ad}{c^2+d^2}\right)$$

Pero la mentalidad de Hamilton era generalizar todo cuanto estudiaba así que en la reunión de la Real Academia Irlandesa terminó su exposición de la teoría de parejas anunciando que está investigando tripletas de numeros reales

La motivación geométrica de Hamilton fue el deseo de extender vectores en el plano a vectores en el espacio a través de numeros trinomiales de la forma $\propto + \beta\, \imath + \gamma\, \jmath$

Este fue el origen de su interés a la pregunta de que si la interpretacion geométrica de la adición y mas particularmente de la multiplicación de numeros complejos en el plano $\mathbb{R}^2$ no podría de algun modo (a través de numeros hipercomplejos) tener una analogía en el espacio $\mathbb{R}^3$

Por tal motivo se avocó en el intento de darles estructura a las tripletas de numeros reales La adición y sustracción de tripletas se definían componente a componente Sin embargo para la multiplicación Hamilton impuso varias condiciones que deberían satisfacerse debería ser asociativa conmutativa y distributiva (sobre la adición) la división debería ser posible se debería cumplir

la ley del modulo (el módulo del producto es igual al producto de los modulos donde el módulo de la tripleta $(a\ b\ c)$ es $a^2 + b^2 + c^2$) y finalmente el producto de tripletas debería tener significado geométrico así como lo tiene el producto de vectores en el plano

Con esto en mente Hamilton representó tripletas $(a\ b\ c)$ como vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$ en la forma $a + b\,\imath + c\,\jmath$ donde se deberían determinar las propiedades de $\jmath$

Debemos señalar que fueron tres los obstáculos que se pusieron en su camino el primero es que no existe álgebra de numeros tridimensionales sino de hipercomplejos cuadridimensionales el segundo es el principio de permanencia que tuvo que rebasar para admitir una multiplicación no conmutativa y el tercero es que la ley del módulo no se cumplía el producto de una suma de tres cuadrados es un suma de cuatro cuadrados antes que de tres [Euler mostró un siglo antes que el producto de la suma de cuatro cuadrados es nuevamente una suma de cuatro cuadrados]

Hamilton deseaba que al multiplicar sus tripletas se cumpliese el principio de permanencia las reglas que se cumplían en $\mathbb{R}^2$ se deberían cumplir en $\mathbb{R}^3$

El empieza planteando

$a + b\,\imath + c\,\jmath$ con $\imath^2 = \jmath^2 = -1$

Además considera la existencia del elemento neutro y también que se cumpla la ley conmutativa y considera el caso simple

$$(a + b\,\imath + c\,\jmath)^2 = a^2 - b^2 - c^2 + 2\,\imath\,a\,b + 2\,\jmath\,a\,c + 2\imath\,j\,b\,c \qquad (1)$$

El criterio que el usa para probar el valor del producto es como en el caso de $\mathbb{C}$ (donde se cumple la ley del módulo) el principio de que la longitud del producto de dos vectores debe ser igual al producto de sus longitudes individuales

Ademas establece que $(a + b\imath + c\jmath)$ tiene longitud Euclidiana $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ La suma de los cuadrados de los coeficientes de 1 $\imath$ y $\jmath$ en el miembro derecho de (1) produce

$$(a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2a\, b)^2 + (2a\, c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Así Hamilton establece el hecho de que la regla del producto se verifica cuando se hace $\imath\jmath = 0$ Sin embargo esto no le gusta Y entonces el nota que el termino en el miembro derecho de (1) debería ser realmente $\imath\jmath + \jmath\imath$ en lugar de 2 $\imath\jmath$ Hamilton considera que $2\imath\jmath$ debe desaparecer para que $\imath\jmath = -\jmath\imath$ De esta forma el tuvo que sacrificar la ley conmutativa Esto se ve claramente en una carta que Hamilton escribió a John Graves el 17 de Octubre de 1843 Me vi entonces tentado por un momento a suponer que $\imath\jmath = 0$ Pero esto parecía extraño y desagradable y percibi que la misma supresión del término podria lograrse asumiendo lo que me parecía menos desagradable a saber que $\imath\jmath = -\jmath\imath$ Hice por tanto $\imath\jmath = k\ \jmath\imath = -k$ reservando para mi mismo investigar si $k = 0$ o no Hamilton le da una nueva y decisiva direccion al problema completo el salta con k a una cuarta dimensión En otras palabras toma k linealmente independiente de 1 $\imath$ y $\jmath$

Hamilton ahora investiga cuidadosamente que deberia ser k^2 Al usar la ley asociativa observa que

$$k^2 = (\imath\jmath)(\imath\jmath) = \imath\,(\jmath\imath)\,\jmath = -\imath\,(\imath\jmath\,)\,\jmath = -\imath^2\jmath^2 = -1$$

Pero el no usa este argumento ya que no está seguro si su multiplicación es asociativa Más tarde se establece la validez de la ley asociativa

Otro analisis fundamental que llevó a Hamilton a abandonar progresivamente la idea de un cálculo geométrico basándose en la noción de ternas es el hecho de que mientras en el plano complejo la multiplicación requiere de la longitud y de un ángulo o sea un total de dos dimensiones la multiplicacion en el espacio necesita de cuatro dimensiones tres procedentes de la rotacion y una debida a la longitud

Por otra parte la composición de dos rotaciones en el espacio no es conmutativa al contrario de lo que ocurre en la geometría plana De esta forma se convence poco a poco que el elemento que permitirá dicha construcción es el cuádruplo

Por espacio de aproximadamente 10 anos Hamilton trató de definir el producto de cuaterniones sin exito

Finalmente el 16 de Octubre de 1843 Hamilton en un relámpago de inspiración comprendió que sus dificultades desaparecerían si utilizaba cuádruplas en lugar de ternas y si además abandonaba la propiedad conmutativa de la multiplicación Es decir para cuádruplas de numeros $a+b\,i+c\,j+d\,k$ con $a\ b\ c\ d$ numeros reales y las unidades imaginarias $i\ j\ k$ se debería tomar $i^2=j^2=k^2=i\,j\,k=-1$

y por tanto debería ser $i\,j=k$ pero $j\,i=-k$ y de forma similar $j\,k=i=-k\,j$ y $k\,i=j=-i\,k$ En todo lo demás las leyes que rigen las operaciones serían las del álgebra usual

Hamilton descubrio que lo que no pudo lograr para $\mathbb{R}^3$ podria conseguirlo para $\mathbb{R}^4$ **había descubierto los cuaterniones** un sistema de numeros completamente nuevo

El propio Hamilton describe el momento histórico de su descubrimiento

Pero el decimosexto dia del mismo mes lunes y dia del consejo de la Real Academia Irlandesa iba caminando para asistir y presidirlo y tu madre iba caminando conmigo [ ] y aunque me hablaba de vez en cuando otro soterrado hilo de pensamientos estaba pasando por mi cabeza que me dio finalmente un resultado [ ] que comprendi inmediatamente su importancia Un circulo eléctrico pareció cerrarse y saltó la chispa precursora de largos años venideros de pensamientos y trabajos [ ]

Ni siquiera pude resistir el impulso irracional de grabar con una navaja en una piedra del puente de Brougham la fórmula fundamental con los simbolos $i\ j\ k$ a saber

$$i^2 = j^2 = k^2 = i\,j\,k = -1$$

que contiene la solución al problema

El valor del descubrimiento de Hamilton descansa en las Matematicas puras donde permitió el desarrollo del álgebra abstracta moderna Además este descubrimiento fue una ruptura con la tradición porque abandonaba la ley conmutativa propia de la multiplicacion o sea $ab = ba$

Hamilton marca en cierta medida el principio del análisis vectorial moderno al representar un objeto geométrico por un símbolo y operar sobre ese simbolo Sin embargo queda el problema latente del significado en un mismo numero de una parte real que no tiene interpretacion geometrica con otra la parte imaginaria que sí la tiene La presencia de esta parte real y su falta de significado constituye el eslabón débil de la teoría y es el punto que recibirá más críticas y va a dividir la comunidad científica principalmente en Inglaterra Por lo tanto Hamilton establece la necesidad de hacer una distinción entre las dos partes del numero pues estima que La separación de las partes real e imaginaria de un cuaternión es una operación de tal frecuencia y debe ser considerada como fundamental en esta teoría

1 3 Los trabajos después de Hamilton

Hamilton escribió dos libros sobre cuaterniones Lectures on Quaterions y Elements of Quaternios publicados en 1853 y 1866 (postumo) respectivamente con el fin de promover el cálculo cuaterniónico pues estaba seguro que el mismo sería de suma importancia en aplicaciones físicas y al desarrollo de la geometría Además consideraba el descubrimiento de los cuaterniones tan importante como el descubrimiento de las fluxiones (cálculo)

Después del descubrimiento de Hamilton pronto se vio a muchos matemáticos buscando estructuras para el espacio $\mathbb{R}^n$ lo cual también motivó el estudio de los sistemas hipercomplejos y en general de las álgebras

Peter G Tait fue el principal defensor del uso de los cuaterniones y quien se encargaría de difundir el trabajo de Hamilton En su libro Elementary Treatise on Quaternion (1867) desarrolla toda la teoría en vista de sus aplicaciones en física más claramente de lo que hacía Hamilton

En este libro en su primer capítulo Tait se enfoca en el cuaternión sin su parte real ("Vectors and their composition) Más adelante establece propiedades de los cuaterniones

Para dos cuaterniones $\propto$ y β se tiene que

$S \propto \beta = S\beta \propto$ y $V \propto \beta = -V\beta \propto$

Donde S define la parte escalar y V la parte vectorial (lo que corresponde a la conmutatividad del producto escalar y la no conmutatividad del producto cruz respectivamente)

Luego desarrolla notables aplicaciones de la teoría en el campo de la geometría y de la física a traves del uso del operador nabla (∇)

J Graves decidió añadir a los cuaterniones una nueva unidad imaginaria l por lo que debería añadir los productos il jl y kl obteniendo así un álgebra real de dimensión 8 que extiende la de los cuaterniones y cuyos elementos bautizo como Octavas En esta nueva álgebra se sigue manteniendo la regla del producto de longitudes

Cayley descubrió de manera independiente las octavas a las que bautizó como álgebra de octoniones y que publicó en marzo de 1845 Por tal motivo también se les llama numeros de Cayley

Estas son 8-tripletas de numeros reales las cuales contienen los cuaterniones y forman un álgebra con división que aparte de no ser conmutativa tampoco es asociativa lo cual habla de una estructura algebraica muy pobre El problema es que el proceso de ir de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$ y de $\mathbb{H}$ a $\mathbb{O}$ es en cada caso una clase de doble proceso en donde en cada etapa se pierde alguna propiedad de

$\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ se pierde la propiedad que $\mathbb{R}$ es ordenado de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$ se pierde la conmutatividad y de $\mathbb{H}$ a $\mathbb{O}$ se pierde la asociatividad

Al mismo tiempo que Hamilton hacia su descubrimiento de los cuaterniones en Alemania Hermann Grasmann descubrió las álgebras exteriores las cuales subsecuentemente fueron importantes en geometria diferencial Ellas tienen generadores e_1 e_2 e_3 e_n las cuales anti-conmutan y satisfacen $e_i^2 = 0$ para todo i y de hecho son álgebras asociativas

Estas son n tuplas de numeros reales sumadas componente a componente y multiplicadas vía el producto exterior" Grassmann las introdujo como parte de un brillante intento de construir un álgebra vectorial en espacio n dimensional

John Graves publica un documento en 1847 titulado On algebraical triplets para un álgebra de la forma $a + b\,e + c\,e^2$ donde $e^3 = -1$ y muestra que esta álgebra es la suma directa de los campos real y complejo

En el desarrollo de su teoría Lectures on Quaternions en 1853 Hamilton presenta su álgebra completamente desarrollada y los cálculos relativos a los cuaterniones mostrando esencialmente que ellos también forman un espacio vectorial lineal sobre el campo de numeros reales e introduciendo dos nociones de productos sobre ellos y mostrando que el producto escalar de dos vectores era bilineal

En 1854 Cayley publica un documento sobre grupos abstractos (finitos) al final del cual dio una definición de un algebra de grupo (sobre los numeros reales o complejos) El llamo a esto un sistema de cantidades complejas y observó que era análogo a los cuaterniones de Hamilton ya que era asociativo no conmutativo pero en general no era un algebra con división

En la década de 1860 Dedekind y Weierstrass probaron que las unicas algebras conmutativas finita dimensionales sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ sin elementos nilpotentes son sumas directas de copias de $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$ Lo que significaba que no solo la adicion sino también la multiplicación en tales álgebras esta dada componente a componente lo cual fue publicado en 1880

De fundamental importancia fueron los trabajos de Benjamin Peirce la primera contribución importante al álgebra en Estados Unidos Nos referimos a su publicación Álgebra Lineal Asociativa de 1870 en donde clasifica álgebras (sistemas de numeros hipercomplejos) de dimensión < 6 dando sus tablas de multiplicación para 162 algebras [1]

Lo importante de su trabajo no es la clasificación sino el significado usado para obtenerlas Entre los avances conceptuales estaban Una definición abstracta de un álgebra finita dimensional uso de coeficientes complejos introducción de elementos nilpotente e idempotente y la descomposición de Peirce

C S Peirce (1881) y Frobenius (1878) independientemente mostraron que las unicas álgebras finitas dimensionales sobre $\mathbb{R}$ (álgebras de n tuplas de numeros reales) que son álgebras con division son los numeros reales los complejos y los cuaterniones

Es importante señalar que si Hamilton hubiese conocido el teorema de Frobenius se hubiese evitado largos años de difícil trabajo en la inutil busqueda de un álgebra asociativa de dimensión tres

En 1873 William K Clifford desarrolla una geometria de movimiento en cuyo estudio generaliza los cuaterniones de Hamilton en los bicuaterniones

En 1876 publica Aplicaciones de Álgebra extensiva de Grassmann proponiendo una modificación al algebra de Grassmann formulando lo que se conoce hoy en día como álgebra de Clifford definida por tener generadores e_1 e_2 e_n los cuales anti conmutan y satisfacen $e_i^2 = a_i$ para elementos elegidos a_1 a_2 a_3 a_n de $\mathbb{R}$ Eligiendo $a_i = 0$ para todo i se obtienen las álgebras exteriores como un caso especial mientras que si se elige $n = 2$ y $a_i \neq 0$ se obtiene el álgebra de los cuaterniones

Fedor E Molin descubre en 1893 que sobre un isomorfimo todas las álgebras simples complejas son álgebras matriciales completas de orden n lo que fue redescubierto independientemente más tarde por Frobenius y Cartan

En 1898 Adolf Hurwitz probó que las unicas álgebras de composición real son $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ $\mathbb{H}$ y $\mathbb{O}$ (un álgebra de composición real es un algebra A sobre $\mathbb{R}$, no necesariamente asociativa o finita-dimensional equipada con una forma cuadrática no singular Q $A \times A \to \mathbb{R}$.

Al final del siglo 19 el Alemán Wilhem Killing se planteó el problema de determinar las algebras de Lie simples (o sea sin subespacios $\mathfrak{a}$ tales que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$) sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los complejos En ese momento fueron llamadas grupos infinitesimales y más tarde bautizados álgebras de Lie por

Hermann Weyl en 1930 Estas son álgebras no asociativas de vital importancia en matemática y física

Killing en 1886 conjetura que las unicas álgebras de Lie simples (en dimensión finita) deberían ser las álgebras de Lie de los grupos especiales lineales ortogonales o simplécticos bien conocidos

Más tarde (1887) comunica a Engel que su conjetura es falsa pues ha descubierto una nueva álgebra de Lie de dimensión 14 para luego determinar la lista completa de las álgebras de Lie simples complejas

Cartan trabajo y corrigió las demostraciones de Killing sin embargo sus presentaciones concretas eran muy complicadas sobre las álgebras de Lie excepcionales

Joseph M Wedderburn prueba que todas las álgebras asociativas simples sobre un campo P son precisamente las álgebras de Matrices completas con elementos de un álgebra con división asociativa sobre P

El físico P A M Dirac redescubrio las álgebras de Clifford en 1920 y luego las uso en conexión con el electrón spin

Otra álgebra no asociativa fue introducida por el físico Pascual Jordán quien en 1932 propuso un programa para descubrir un marco algebraico para la mecánica cuántica derivando todo su estudio en el álgebra de Jordan la cual es un k espacio vectorial J sobre un cuerpo k de característica distinta de 2 y dotado de una aplicación bilineal J x J → J $(x\ y) \to x\ y$ que verifica

$$(y\ x) = (x^2 y)\ x \qquad \forall x\ y$$

Ademas de ser importante la contribución que hace Hamilton al desarrollo de lo que conocemos como cálculo vectorial quizas su mayor aporte a las matemáticas fue la liberación del álgebra del sometimiento a que la tenía el principio de permanencia de las leyes formales y en particular la propiedad conmutativa Hamilton nos asoma a las álgebras no conmutativas

A partir de él los matemáticos pierden el miedo a investigar otras posibles álgebras no conmutativas como las algebras vectoriales así la del aleman Grassmann contemporáneo de Hamilton y las algebras de dimensión finita

Puede decirse que los trabajos de Hamilton fueron al álgebra lo que las geometrías no euclidianas fueron a la geometria o dicho de otro modo que la propiedad conmutativa encadenaba al álgebra como el quinto postulado de Euclides encadenaba a la geometría

CAPÍTULO II

PROPIEDADES E INVOLUCIONES SOBRE CUATERNIONES

2 1 Propiedades e Involuciones sobre cuaterniones

En este segundo capítulo presentamos formalmente al cuerpo no conmutativo de los cuaterniones su representación matricial y luego un estudio sobre las involuciones y la proyección vectorial Finalmente discutimos sus propiedades básicas

Los cuaterniones son una extensión de los numeros reales similar a la de los numeros complejos mientras estos son una extension de los reales por la adición de la unidad imaginaria i los cuaterniones son una extensión generada de forma análoga adjuntando las unidades imaginarias i j k a los numeros reales y sujeto a las condiciones

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \qquad (1)$$

Este conjunto de ecuaciones son las identidades multiplicativas fundamentales de los cuaterniones especificadas en la siguiente tabla

TABLA 1

	1	i	j	k
1	1	i	j	K
i	i	1	k	J
J	j	k	1	i
k	k	j	i	1

Luego 1 $\imath$ $\jmath$ k son las bases de los componentes de un cuaternión

Los cuaterniones forman un álgebra de gran interés en donde cada objeto contiene 4 escalares variables conocidos a veces como parámetros de Euler (que no deben confundirse con los angulos de Euler) estos objetos pueden ser sumados y multiplicados como una unidad sencilla en forma similar al álgebra usual de números Sin embargo existe una diferencia significativa la multiplicacion de cuaterniones no es conmutativa

Como los cuaterniones poseen una parte escalar y otra vectorial dos productos de suma importancia en su estudio son el producto interno (o escalar) y el producto vectorial (o producto cruz) los cuales definimos a continuación

Definición 2 1 1 (Producto interno o escalar)

Sean $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que

$$v_1 = a_1 \imath + a_2 \jmath + a_3 k$$

$$\overrightarrow{v_2} = b_1 \imath + b_2 \jmath + b_3 k$$

Entonces el producto interno de estos vectores se define como

$$\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \alpha \qquad con\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Definición 2 1 2 (Norma de un vector)

Sea $\overrightarrow{v_1}$ un vector en $\mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{v_1} = a_1 \imath + a_2 \jmath + a_3 k$

Definimos la norma de $\vec{v_1}$ como

$$\|\vec{v_1}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Teorema 2 1 3 Ángulo entre dos vectores

Si θ es el ángulo que forman entre si $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ entonces el producto escalar es el numero real dado por

$$\vec{v_1} \quad \vec{v_2} = \left|\vec{v_1}\right| \ \left|\vec{v_2}\right| \cos\theta$$

<u>Observación.</u>

Si $\quad 0° < \theta < 90° \Rightarrow \vec{v_1} \quad \vec{v_2} > 0$

Si $\quad 90 < \theta < 180 \Rightarrow \vec{v_1}\ \vec{v_2} < 0$

Si $\quad \theta = 90° \Rightarrow \vec{v_1} \quad \vec{v_2} = 0$

Como los vectores unitarios $\imath \quad \jmath \ y \ k$ son perpendiculares entre sí tenemos que

$$\imath \quad \imath = \jmath \quad \jmath = k \quad k = 1$$

$$\imath \quad \jmath = \jmath \quad k = k \quad \imath = 0$$

El producto escalar cumple las siguientes propiedades

ı <u>Producto por un escalar</u>

$$\alpha\, \vec{v_1} \quad \vec{v_2} = \alpha\left(\vec{v_1} \quad \vec{v_2}\right) \ \mathbf{y} \ \vec{v_1} \quad \beta\, \vec{v_2} = \beta\left(\vec{v_1} \quad \vec{v_2}\right)$$

ii Conmutatividad

$$\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_1}$$

iii Asociatividad

$$\overrightarrow{v_1} \quad \left(\overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_3}\right) = \left(\overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2}\right) \quad \overrightarrow{v_3}$$

iv Distributividad

$$\overrightarrow{v_1} \quad \left(\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\right) = \overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_3}$$

$$y \quad \left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) \quad \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} \quad \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_2} \quad \overrightarrow{v_3}$$

Definición 2 1 4.(Producto Vectorial)

Sean $\overrightarrow{v_1}$ $\overrightarrow{v_2}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que

$$\overrightarrow{v_1} = a_1 \imath + a_2 \jmath + a_3 k$$

$$\overrightarrow{v_2} = b_1 \imath + b_2 \jmath + b_3 k$$

Definimos el producto vectorial de $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ como

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\imath - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\jmath + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

En general el producto vectorial de dos vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ se define como otro vector $\vec{v} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$ cuya norma es

$$|\vec{v_1} \times \vec{v_2}| = \vec{v_1} \quad \vec{v_2} \; sen\,\theta \qquad 0 < \theta < 180°$$

Teorema 2 1 5

Dados $\overrightarrow{v_1}\ \overrightarrow{v_2}\ y\ \overrightarrow{v_3} \in \mathbb{R}^3$ ***y*** $\forall \alpha\ \beta\ \gamma \in \mathbb{R}$ las propiedades fundamentales del producto vectorial son

I <u>Es Anti conmutativo</u>

$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = -\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_1}$

II <u>Distributivo</u>

$\overrightarrow{v_1} \times (\beta \overrightarrow{v_2} + \gamma \overrightarrow{v_3}) = \beta(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) + \gamma(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_3})$

y $(\alpha \overrightarrow{v_1} + \beta \overrightarrow{v_2}) = \alpha(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_3}) + \beta(\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{v_3})$

III <u>Asociatividad respecto al producto por escalar</u>

$\alpha(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) = (\alpha \overrightarrow{v_1}) \times \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1} \times (\alpha \overrightarrow{v_2})$

En particular

$i \times i = j \times j = k \times k = 0$

Cuando $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son paralelos entonces $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = 0$

2 2 Definición y Notaciones Básicas

El conjunto $\mathbb{H}$ de los cuaterniones se define formalmente por

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \quad a\ b\ c\ d \in \mathbb{R}\}$$

Dado un cuaternion

$q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ **(1)**

Su parte escalar se define como el numero ***a*** mientras que la parte vectorial es ***bi + cj + dk*** Por lo tanto un cuaternion con cero como su parte escalar lo llamamos vector o cuaternión puro

La ecuación (1) tambien es conocida como la forma cuaterniónica estándar o ecuación polinomial del vector (a b c d) $\in \mathbb{H}$

2 2 1 Operaciones y Propiedades de los Cuaterniones

A continuación vamos a presentar las operaciones básicas de los cuaterniones y las propiedades que presenta cada operación

2 2 1 1 Adicion de Cuaterniones

La adición de cuaterniones se define componente a componente

Sean q_1 q_2 q_3 $\in \mathbb{H}$ entonces

$$q_1 + q_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$
$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

Los cuaterniones con la propiedad de la adición forman un grupo abeliano

La adicion en $\mathbb{H}$ cumple las siguientes propiedades

i **Clausura** $q_1 + q_2 \in \mathbb{H}$

ii **Conmutatividad** $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$

iii **Asociatividad** $(q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3)$

iv **Identidad** existe $0 = 0 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}$

Tal que $0 + q_1 = q_1 + 0 = q_1$

v **Inverso aditivo** existe $-q_1 = -a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k \in \mathbb{H}$ tal que

$$q_1 + (-q_1) = (-q_1) + q_1 = 0$$

2 2 1 2 Producto de un cuaternıón por un escalar

Sea $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ *y* $q_1 \in \mathbb{H}$ *Luego el producto de* α *por* q_1 *se define como*

$$\alpha q_1 = \alpha(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) = \alpha a_1 + \alpha b_1 i + \alpha c_1 j + \alpha d_1 k$$

2 2 1 3 Multiplıcacıon de Cuaternıones

El producto de cuaternıones lo podemos definır basándonos en el producto de las ıdentıdades multıplıcatıvas fundamentales de los cuaternıones definidas en la tabla (1)

$\forall \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \in \mathbb{H}$ se cumple que

$$q_1 * q_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) * (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i +$$

$$+ (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) k$$

La multıplıcacıón en $\mathbb{H}$ verıfica las sıguıentes propıedades

i **Clausura** $\quad q_1 * q_2 \in \mathbb{H}$

ıı **No conmutatıvıdad** $\exists\, q_1 \quad q_2 \in \mathbb{H}$ *tales que* $q_1 * q_2 \neq q_2 * q_1$

ııı **Asocıatıvıdad** $\quad (q_1 \quad q_2) \quad q_3 = q_1 \quad (q_2 \quad q_3)$

ıv **Distributivıdad** $\quad q_1 * (q_2 + q_3) = q_1 * q_2 + q_1 * q_3 \quad$ y

$$(q_2 + q_3) * q_1 = q_2 * q_1 + q_3 * q_1$$

iv **Identidad** existe $1 = 1 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}$ tal que

$$1 * q_1 = q_1 * 1 = q_1$$

v Inverso multiplicativo

Sean $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k \neq 0$ y

$q_2 = a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k \neq 0$

Donde $q_1\ q_2 \in \mathbb{H}$

Entonces $q_1 q_2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = \alpha$

Donde $\alpha > 0$ pues es suma de cuadrados no todos nulos

Sea $q_3 = \frac{a_1}{\alpha} - \frac{b_1}{\alpha} i - \frac{c_1}{\alpha} j - \frac{d_1}{\alpha} k$

Entonces

$$q_1 q_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)\left(\frac{a_1}{\alpha} - \frac{b}{\alpha} i - \frac{c_1}{\alpha} j - \frac{d_1}{\alpha} k\right) = 1$$

Luego el inverso multiplicativo de q_1 *es* q_3 y lo denotaremos por q_1^{-1}

2 2 1 4 Exponenciación

La exponenciacion de cuaterniones está relacionada con funciones trigonométricas al igual que sucede con los complejos

Dado $q \in \mathbb{H}$ su exponenciación se define por

$$e^q = e^{a+bi+cj+dk} = e^a(\cos\sqrt{b^2+c^2+d^2} + \frac{sen\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}(bi+cj+dk)\ )$$

2 2 1 5 Conjugado de un Cuaternión

Sea $q_1 \in \mathbb{H}$ Denotamos por $\overline{q_1}$ al conjugado de q_1 y lo definimos como

$\overline{q_1} = a - b_1 i - c_1 j - d_1 k$

Formalmente podemos definir la funcion conjugación de la siguiente manera

$f\ \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

$$q \to f(q_1) = \overline{q_1} = a - b_1 i - c_1 j - d_1 k$$

Ademas $\forall\ q_1\ \ q_2 \in\ \mathbb{H}$ el conjugado de q cumple las siguientes propiedades

i **Idempotencia** $\overline{\overline{q_1}} = q_1$

ii **Aditividad** $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$

iii **Multiplicidad** $\overline{q_1 * q_2} = \overline{q_2} * \overline{q_1}$

iv **Divisibilidad** $\overline{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)} = \frac{\overline{q_1}}{\overline{q_2}}$

2.2 1 6 Módulo de un Cuaternión

Si $q_1 \in \mathbb{H}$ su módulo se define por el numero real no negativo $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Por tanto

$$|q_1| = \sqrt{q_1 * \overline{q_1}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Asi

$$q_1 * \overline{q_1} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q_1|^2$$

Ademas el módulo de un cuaternión cumple las siguientes propiedades

$$|\overline{q_1}| = |q_1|$$

$$|q_1 * q_2| = |q_1| * |q_2|$$

$$|q_1 * q_2|^2 = |q_1|^2 * |q_2|^2$$

$$|rq_1| = |r| \quad |q_1|$$

2 2 1 7 Funcion selectora

Sea $q \in \mathbb{H}$ con a en su parte real y sea $w \ \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ la **funcion selectora** tal que

$$w(q) = \frac{(q+\overline{q})}{2} = a$$

La cual selecciona la parte real del cuaternión

2 3 Representación Alternativa de Cuaterniones

Los cuaterniones tambien pueden escribirse en forma vectorial lo cual simplifica significativamente las formulas y operaciones para representarlos De esta manera el cuaternión

$$q = a + b\imath + c\jmath + d\,k$$

Puede escribirse como

$q = \left(a \quad \overrightarrow{v}\right)$ donde $\overrightarrow{v}$ es el vector $\langle b \quad c \quad d \rangle$

Las operaciones básicas en $\mathbb{H}$ las podemos reescribir usando esta nueva representación vectorial

Sean $q_1 = (a_1 \ \overrightarrow{v_1}) \quad q_2 = (a_2 \ \overrightarrow{v_2}) \ \epsilon \ \mathbb{H}$ y $\alpha \epsilon \mathbb{R}$

i Adición

$$q_1 + q_2 = \left(a_1 + a_2 \quad v_1 + v_2\right)$$

ii Sustracción

$$q_1 - q_2 = \left(a_1 - a_2 \quad \vec{v_1} - \vec{v_2}\right)$$

iii Multiplicación

$$q_1 * q_2 = (a_1 a_2 - \vec{v_1}\ \vec{v_2} \quad a_1 \vec{v_2} + a_2\vec{v_1} + \vec{v_1} \times \vec{v_2})$$

iv Elemento idéntico

Este se define por $\left(1 \quad \vec{0}\right)$ o sea

$$q * 1 = (a \quad \vec{v})(1\ \vec{0}) = \left(a - \vec{v}\vec{0} \quad a\,\vec{0} + 1\vec{v} + \vec{v} \times \vec{0}\right) = (a \quad \vec{v})$$

$$1 * q = (1 \quad \vec{0})(a\ \vec{v}) = \left(a - \vec{0}\vec{v} \quad 1\,\vec{v} + a\vec{0} + \vec{0} \times \vec{v}\right) = (a \quad \vec{v})$$

v Inverso Multiplicativo

El inverso q^{-1} de $q = \left(a \quad \vec{v}\right)$ se define por

$$q^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + |\vec{v}|^2} \quad \frac{-\vec{v}}{a^2 + |\vec{v}|^2}\right) = \frac{(a \quad -\vec{v})}{a^2 + |\vec{v}|^2}$$

vi Multiplicación por un escalar

$$\alpha q = (\alpha \quad \vec{0})\, q$$

$$= (\alpha \quad \vec{0})(a \quad \vec{v})$$

$$= \left(\alpha a - \vec{0}\vec{v} \quad \alpha\vec{v} + a\vec{0} + \vec{0} \times \vec{v}\right)$$

$$\alpha q = (\alpha a \quad \alpha\,\vec{v})$$

vii Modulo o Valor Absoluto

Si $q = \left(a \quad \vec{v}\right)$

$$|q| = \sqrt{a^2 + \left|\vec{v}\right|^2}$$

2 4 Involución en Cuaterniones

Las involuciones son definidas usualmente como aplicaciones auto inversas es decir aplicaciones que son su propio inverso Un ejemplo trivial es la conjugación de un numero complejo el cual es obviamente auto-inverso

En este trabajo consideramos involuciones de los cuaterniones esto es funciones de un cuaternión variable que son auto inversas

La conjugación en cuaterniones es una involución obvia pero esta no es la unica involución en cuaterniones De hecho los cuaterniones tienen un numero infinito de involuciones como demostraremos más adelante

Presentaremos definiciones para involuciones las cuales van más allá de la simple definicion de una aplicación auto inversa

Una representación alternativa y mucho más conveniente para un cuaternión $q = w + ix + jy + kz$ es una combinacion de su parte escalar y su parte vectorial análogamente a un numero complejo y esta representación puede emplearse en el resto del trabajo

Sea$q = a + b\mu$ donde μ es un vector unitario y a b son numeros reales

El módulo de la parte vectorial del cuaternion es b y μ es su dirección

En términos de la representación cartesiana

$$a = w \quad b = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \mu = \frac{xi + yj + zk}{b} \quad \textbf{(2)}$$

Lema 2 4 1

El cuadrado de cualquier vector unitario es 1

Demostración

Sea μ un vector unitario definido como en la ecuacion (2)

Su cuadrado está dado por

$$\mu^2 = \frac{xi + yj + zk}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \frac{x^2 i^2 + y^2 j^2 + z^2 k^2 + xyij + xyji + xzik + xzki + yzjk + yzkj}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mu^2 = \frac{-x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = -1$$

Corolario 2.4 2

Existe un numero infinito de soluciones para la ecuacion $x^2 = -1$

El conjugado de un cuaternión en la forma compleja es $\bar{q} = a - b\mu$ Geométricamente esto es una inversión de la dirección de la parte vectorial El conjugado de un cuaternión tiene propiedades análogas a la de los conjugados complejos con la excepción de que el conjugado del cuaternión es una anti-involución ($\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$) El producto de un cuaternión por su conjugado da la norma o el cuadrado del módulo Esto se sigue directamente del **Lema 2 4.1**

$$q * \overline{q} = (a + b\mu)(a - b\mu) = a^2 - b^2 \mu^2 =$$

$$= a^2 + b^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

2 5 Involución

Muchos trabajos de referencia matematica definen la involucion simplemente como una aplicación la cual es su propio inverso Sin embargo nosotros nos basaremos en las tres propiedades siguientes de suma importancia ya que de otra manera definiriamos aplicaciones triviales auto-inversas las cuales tienen propiedades sin interés

Definición 2 5 1

Una involucion sobre los cuaterniones es una función $f \;\; \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ tal que f cumple con las siguientes propiedades

i) Una involución es su propio inverso

$\forall \; q \in \mathbb{H}$ se cumple que

$$f\left(f\left(q\right)\right) = q$$

ii) la funcion f es lineal

$\forall \; q_1 \;\; q_2 \in \mathbb{H}$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ se cumple

$$f\left(q_1 + q_2\right) = f\left(q_1\right) + f\left(q_2\right) \text{ y } \lambda f(q_1) = f\left(\lambda q_1\right)$$

iii) Una involucion f es homomórfica

$\forall \; q_1 \;\; q_2 \in \mathbb{H}$ Se verifica

$$f\left(q_1 * q_2\right) = f\left(q_1\right) * f\left(q_2\right)$$

Si la condición anterior se remplaza por

$$f\left(q_1 * q_2\right) = f\left(q_2\right) * f\left(q_1\right)$$

Entonces decimos que f es una **anti involución**

En lo sucesivo utilizaremos la letra f con un subíndice consistente de un vector unitario v para definir las involuciones o sea

$$f_v(q) = -vqv$$

Donde

$$-vqv = -v * q * v$$

Nos referimos a la dirección definida por v como el eje de involución

2 5 2 Involución de Cuaterniones

Teorema 2 5 2 1

Dados $q\ v \in \mathbb{H}$ con v un vector unitario la aplicación

$$f_v \quad \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$q \rightarrow f\left(q\right) = -v\,q\,v$$

es una involución en $\mathbb{H}$

Demostración

La condición i) se satisface fácilmente usando el lema 2 4 1 es decir

$$f\left(f\left(q\right)\right) = -v\left(-v\,q\,v\right)v = \left(-1\right)q\left(-1\right) = q$$

La condicion ii) se cumple usando el hecho de que la multiplicación de cuaterniones es distributiva sobre la adición

$$f\ (q_1 + q_2) = -v\ (q_1 + q_2)\ v = -\ v\ q_1\ v - v\ q_2\ v = f\ (q_1) + f\ (q_2)$$

La segunda parte de la condición ii) es trivial ya que los numeros reales conmutan con los cuaterniones

La condición iii) se cumple por lo siguiente

$$f\ (q_1)\ f\ (q_2) = (-\ v\ q_1\ v)(-\ v\ q_2\ v)$$

$$= v\ q_1\ v\ v\ q_2\ v$$

$$= v\ q_1\ (-1)\ q_2\ v$$

$$= -\ v\ q_1 q_2 v = f_v(q_1 * q_2)$$

Observese que una aplicacion

$$q \rightarrow v_1\ q\ v_2 \quad (v_1 \neq v_2)$$

Es su propio inverso pero no es una involución como se considera en este trabajo ya que no satisface la condicion iii

2 5 4. Propiedades de la involución en Cuaterniones

Lema 2 5 4 1

Sean μ_1 y μ_2 vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $|\mu_1| \neq 0 \quad |\mu_2| \neq 0$

Luego se cumple que

$$\mu_1 * \mu_2 = q \in \mathbb{H}$$

Donde

$$S(q) = -\mu_1\ \mu_2 \quad \text{y} \quad V(q) = \mu_1 \times \mu_2$$

Demostración

Sean $\mu_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ y $\mu_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$

Su producto está dado por

$$\mu_1 * \mu_2 = (x_1 i + y_1 j + z_1 k)(x_2 i + y_2 j + z_2 k)$$

$$= x_1 x_2 i^2 + y_1 y_2 j^2 + z_1 z_2 k^2 + x_1 y_2 ij + y_1 x_2 ji +$$

$$+ x_1 z_2 ik + z_1 x_2 ki + y_1 z_2 jk + z_1 y_2$$

$$= -(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) + (y_1 z_2 - z_1 y_2) i +$$

$$+ (z_1 x_2 - x_1 z_2) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

Si cambiamos el orden del producto cambia el orden de todos los productos de dos vectores unitarios i j y k ya que $i\,j = -\,j\,i$ y así esto niega todas las componentes de la parte vectorial del resultado La parte escalar $-\left(x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2\right)$ es invariable Por tanto invirtiendo el orden del producto de conjugados se verifica el resultado Las partes escalar y vectorial son igual a menos el producto escalar y el producto vectorial respectivamente de acuerdo a la definición estándar de estos productos

Lema 2 5 4 2 Si μ_1 y μ_2 son dos vectores tales que $\mu_1 \perp \mu_2$

Luego $\mu_1 * \mu_2 = -\mu_2 * \mu_1$

Demostracion

El lema 2 5 4 1 define la parte escalar del resultado $-\left(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\right)$ como menos el producto interno de los dos vectores

Como $\mu_1 \perp \mu_2$ entonces $-\left(x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2\right) = 0$ Por tanto el producto de vectores perpendiculares es un vector y este es el producto vectorial de los dos vectores Este vector cambia de signo (se invierte) si el orden del producto es invertido o sea

$$\begin{aligned}\mu_1 * \mu_2 &= (y_1z_2 - z_1y_2)i + (z_1x_2 - x_1z_2)j + (x_1y_2 - y_1x_2)k \\ &= -(z_1y_2 - y_1z_2)i - (x_1z_2 - z_1x_2)j - (y_1x_2 - x_1y_2)k \\ &= -[(z_1y_2 - y_1z_2)i + (x_1z_2 - z_1x_2)j + (y_1x_2 - x_1y_2)] \\ &= -\mu_2 * \mu_1\end{aligned}$$

Teorema 2 5 4 3 Composicion

La composición de dos involuciones perpendiculares es conmutativa Esto es

$(f_2 \circ f_1)(q) = (f_1 \circ f_2)(q)$ donde $v_1 \perp v_2$

Demostración

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(q) &= f_2(-v_1\, q\, v_1) \\ &= -v_2\,(-v_1\, q\, v_1)\, v_2 \\ &= v_2\, v_1\, q\, v_1\, v_2 \\ &= -v_1\, v_2\, q\, (-v_2\, v_1) \\ &= -v_1\,(-v_2\, q\, v_2)\, v_1 = (f_1 \circ f_2)(q)\end{aligned}$$

Teorema 2 5.4 4 (Doble Composición)

Dado un conjunto de tres vectores unitarios v_1 v_2 v_3 mutuamente perpendiculares tales que $v_1\ v_2 = v_3$ entonces

$$(f_1 \circ f_2) = f_3(q)$$

Demostración

$$\left(f_2 \circ f_1\right)(q) = -v_2\left(-v_1\, q\, v_1\right) v_2$$

$$= v_2\, v_1\; q\; v_1\, v_2$$

$$= -v_1\, v_2\; q\; v_1\, v_2$$

$$= -\, v_3\, q\, v_3 = f_{v_3}\left(q\right)$$

Corolario 2 5 4 5 (Triple Composición)

La Composición de tres involuciones mutuamente perpendiculares es una identidad o sea

$$\left(f_1 \circ f_2 \circ f_3\right)(q) = q$$

Demostracion

Por el teorema 2 5 4 3 tenemos que

$$\left(f_1 \circ f_2\right)(q) = f_3\left(q\right)$$

Aplicando una involución sobre v_3 a ambos lados obtenemos

$$(f_1 \circ f_2 \circ f_3)(q) = (f_3 \circ f_3)(q) =$$

$$= -v_3 \left(-v_3\ q\ v_3\right) v_3$$

$$= (v_3\ \ v_3)\ q\ (v_3\ \ v_3)$$

$$= (-1)\ q\ (-1)$$

$$= q$$

De este modo vemos que un conjunto de tres involuciones mutuamente perpendiculares (o sea involuciones alrededor de un conjunto de tres ejes mutuamente perpendiculares) es cerrado bajo la composición de las involuciones y por el teorema 2 5 4 3 el orden de la composición no es importante

2 6 Interpretación geométrica de la involución en cuaterniones

Teorema 2 6 1

Dado $v \in \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ es el conjunto de los cuaterniones puros unitarios)

Si $q = a + b\mu$ es un cuaternión arbitrario y f la involución asociado a v entonces

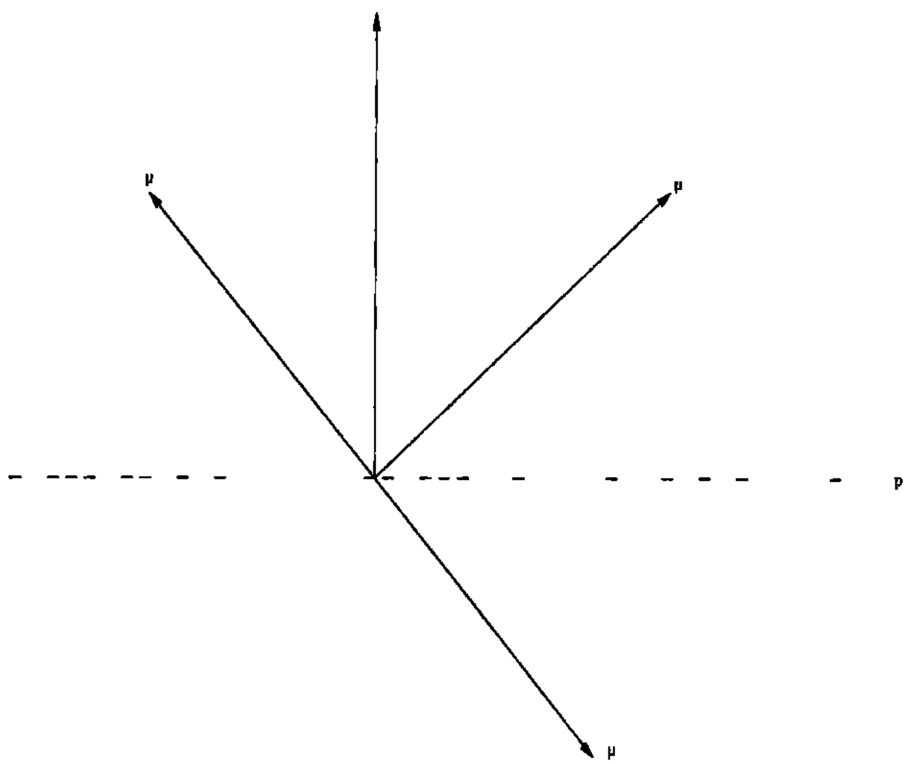
$$f_v(q) = a + bf_v(\mu)$$

Es decir la involución deja invariante la parte escalar del cuaternión y refleja la parte vectorial en el eje de involución v

Demostración

$$f_v(q) = -v\,(a + b\mu)v = -v\,a\,v - vb\mu v$$
$$= -v^2\,a - vb\mu v$$
$$= a + b\,(-v\mu v)$$
$$= a + bf_v(\mu)$$

Reconocemos que $v\ \mu\ v$ es una reflexion de μ en el plano normal a μ Además $-\ v\ \mu\ v$ es una reflexión de μ en la linea definida por v como se muestra en la figura 1 El resultado de la reflexión de la parte vectorial sigue siendo un vector y la parte escalar queda invariante como se muestra y se establece



Corolario 2 6 2

Una involución aplicada a un cuaternion con la parte vectorial paralela a los ejes de involución es una identidad o sea

$$f\left(a+\mu b\right) = a + b\mu \quad \text{donde } v \;//\; \mu$$

Demostración

Por el **Teorema 2 6 1**

$$f\left(q\right) = a + b(-v\mu v)$$

Como v y μ son vectores unitarios y son paralelos entonces $v = \pm\mu$ y el resultado en el miembro derecho se reduce a $a + b\,\mu = q$ en ambos casos

Corolario 2 6 3

Una involución aplicada a un cuaternión con la parte vectorial perpendicular al eje de involución da como resultado el conjugado del cuaternión o sea

$f\,(a + \mu b) = a - \mu b$ donde $v \perp \mu$

Demostración

Por el **Teorema 2 6 1**

$f\,(q) = a - v\mu v b$

Si $v \perp \mu$ podemos usar el lema 2 5 4 3 para invertir el orden de los dos vectores unitarios luego

$$f_v\,(q) = a + b\,\mu\, v^2 = a - b\mu$$

Lema 2 6 4

El producto de dos vectores unitarios $v_1 \, y \, v_2$ es un cuaternión con argumento igual al angulo entre los dos vectores o sea

$$v_1 v_2 = -e^{-\mu\theta}$$

El signo del argumento depende del orden de los dos vectores (el ángulo es medido desde el primer vector hasta el segundo)

Demostracion

El **Lema 2 5 4 1** identifica las partes escalar y vectorial del producto de dos vectores con menos el producto interno y el producto vectorial respectivamente o sea

$$v_1 v_2 = -v_1 \; v_2 + v_1 \times v_2$$

Como estos productos están dados por vectores unitarios mediante $\cos\theta$ y $\mu \; sen \; \theta$ donde μ es perpendicular al plano que contiene los dos vectores entonces podemos escribir

$$v_1 \; v_2 = - \cos\theta + \mu \; sen \; \theta = - e^{(-\mu\theta)}$$

Teorema 2 6 5

La composición de dos involuciones es una rotación de la parte vectorial del cuaternión efectuada alrededor de un eje normal al plano que contiene los dos ejes de involución El ángulo de rotación es dos veces el ángulo entre los dos ejes de involución Cuando las dos involuciones son perpendiculares la composición resultante es una involución la cual es una rotacion de la parte vectorial del cuaternión por π

Demostración

Sean v_1 y v_2 dos vectores unitarios y q un cuaternión arbitrario Entonces la composición de dos involuciones alrededor de v_1 y v_2 está dado por

$$(f_2 \circ f_1)(q) = -v_2(-v_1 q v_1)v_2 = v_2 v_1 q v_1 v_2$$

Sea $p = v_2 v_1$ un cuaternion unitario y por el lema 2 5 4 1 podemos escribir el resultado sobre el lado derecho como $p q \bar{p}$

Si separamos a $q = a + \mu b$ en su parte escalar y vectorial tenemos

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(q) = v_2 v_1 q v_1 v_2 = p q \overline{p} &= p(a + b\mu)\overline{p} \\ &= p a \overline{p} + p b\mu \overline{p} \\ &= p\overline{p} a + b(p \mu \overline{p}) \\ &= a + b(p \mu \overline{p})\end{aligned}$$

El Termino $p \mu \overline{p}$ define una rotación donde el eje de rotación está dado por la parte vectorial de p y el angulo de rotación es dos veces el argumento de p Luego entonces por el **Lema 2 5 4.1** sabemos que el eje de rotación es perpendicular al plano que contiene los dos vectores y del **Lema2 6 4** sabemos que el ángulo de rotación es dos veces el angulo entre los dos vectores

2 7 El conjugado de un cuaternión

Teorema 2 7 1

El conjugado del cuaternión es una anti-involución

Demostración

La definición del conjugado de un cuaternion $q = a + \mu b$ es $\bar{q} = a - \mu b$

Tenemos que demostrar que $\bar{q}$ satisface las tres propiedades de la definición de Involución

Se puede ver claramente que el conjugado del cuaternión satisface la propiedad I

Demostraremos que el conjugado del cuaternión satisface la propiedad II

Sean $q_1 = a + \mu_1 b$ y $q_2 = c + \mu_2 d$

Entonces

$$q_1 + q_2 = (a + c) + (\mu_1 b + \mu_2 d)$$

Como al invertir dos vectores tambien se invierte su suma vemos que el conjugado del cuaternión es distributivo sobre la adición como se requiere

La segunda parte de la propiedad II es obvia

Para demostrar que el conjugado de cuaterniones satisface III debemos establecer la siguiente igualdad $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{(a + b\mu\ )(c + d\mu_2\ )}$$

$$= \overline{(ac + ad\mu_2 + bc\mu_1 + bd\mu_1\mu_2)}$$

$$= ac - ad\mu_2 - bc\mu_1 + bd\mu_2\mu_1$$

$$= (c - d\mu_2)(a - b\mu_1)$$

$$= \overline{(c + d\mu_2)}\ \overline{(a + b\mu_1)}$$

$$= \overline{q_2}\ \overline{q_1}$$

Usando el lema **2 5 4 2** cambiamos el orden de los dos vectores en el segundo termino del miembro derecho para obtener el resultado requerido

$$ac - bd\mu_1\mu_2 - bc\mu_1 - ad\mu_2 = ac - bd\mu_1\mu_2 - bd\mu_1 - ad\mu_2$$

Vamos a demostrar ahora que el conjugado de un cuaternión puede expresarse usando la suma de tres involuciones mutuamente perpendiculares

Lema 2 7 2

La suma de tres involuciones mutuamente perpendicular aplicadas a un vector niega el vector (invierte su direccion)

Esto es dado un conjunto de tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares como en el **Teorema 2.5 4 4** y un vector arbitrario μ

$$f_1(\mu) + f_2(\mu) + f_3(\mu) = -\mu \qquad (3)$$

Demostración

Sea $\mu = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$ donde $\eta_i \parallel v_i \quad i \in \{1\ 2\ 3\}$ En otras palabras debemos resolver μ mediante tres vectores paralelos a los tres vectores unitarios mutuamente perpendicular $v_1 \quad v_2 \quad y \quad v_3$ Al sustituir la representacion de μ en la ecuación (3) se tiene

$$-v_1(\mu)v_1 - v_2(\mu)v_2 - v_3(\mu)v_3 = -\mu$$

La propiedad ii nos permite aplicar la involución separadamente a las tres componentes

$$- \quad v_1\,\eta_1\,v_1 - v_1\,\eta_2\,v_1 \; - \; v_1\,\eta_3\,v_1 \; - \; v_2\,\eta_1\,v_2 - v_2\,\eta_2\,v_2 \; - \; v_2\,\eta_3\,v_2 \; -$$

$$- \quad v_3\,\eta_1\,v_3 - v_3\,\eta_2\,v_3 \; - \; v_3\,\eta_3\,v_3 \; = \; -\mu$$

Usamos los **Corolarıos 2 6 2 y 2 6 3** aplıcándolos a un vector prımero para establecer que una ınvolucıón con eje paralelo a un vector es una ıdentıdad y segundo para establecer que una ınvolucıón con eje perpendıcular al vector ınvıerte o nıega el vector

$$\eta_1 \; - \; \eta_2 \; - \; \eta_3 \; - \; \eta_1 \; + \; \eta_2 \; - \eta_3 \; - \; \eta_1 \; - \; \eta_2 \; + \; \eta_3 \; = \; -\mu$$

$$- \; \eta_1 \; - \; \eta_2 \; - \; \eta_3 \; = \; -\mu$$

Lo cual es la proposıcıón hecha al ınıcıo de la prueba

Teorema 2 7 3

Dado un conjunto de tres vectores unıtarıos mutuamente perpendıculares (como en el teorema **2 5 4.4**) el conjugado de q puede expresarse como

$$\bar{q} \; = \; \frac{1}{2}\left(f_1(q) \; + \; f_2(q) \; + \; f_3(q) \; - \; q \right) \qquad \textbf{(4)}$$

Demostracion

Sea $q \; = \; a + b\mu$ sustıtuyendo esta expresıón en la ecuacıón (4) aplıcando las tres ınvolucıones separadamente a los componentes de q usando la propiedad ıı y observando del **Teorema 2 6 1** que la parte escalar a es ınvarıante bajo las ınvolucıones obtenemos

$$\frac{1}{2}(f_{v1}(q) + f_{v2}(q) + f_{v3}(q) - q)$$

$$= \frac{1}{2}(f_1(a + \mu b) + f_2(a + \mu b) + f_3(a + \mu b) - (a + \mu b))$$

$$= \frac{1}{2}(-v_1(a + \mu b)v_1 - v_2(a + \mu b)v_2 - v_3(a + \mu b)v_3 - a - \mu b)$$

$$= \frac{1}{2}(-v_1 a v_1 - v_1 \mu v_1 b - v_2 a v_2 - v_2 \mu v_2 b - v_3 a v_3 - v_3 \mu v_3 b - a - \mu b)$$

$$= \frac{1}{2}(a + f_1(\mu)b + a + f_2(\mu)b + a + f_3(\mu)b - a - \mu b)$$

$$= \frac{1}{2}(2a + f_1(\mu)b + f_2(\mu)b + f_3(\mu)b - \mu b)$$

$$= a + \frac{1}{2}(f_1(\mu) + f_2(\mu) + f_3(\mu) - \mu)b$$

$= a - b\mu$ **y por el Lema 2 7.2**

$= \overline{q}$

2 8 Proyección usando involuciones

Demostraremos ahora la utilidad de la involucion en cuaterniones presentando fórmulas para la proyección de un vector en una dirección o perpendicular a la misma

Teorema 2 8 1

Un vector arbıtrarıo μ puede resolverse en dos componentes una paralela y una perpendıcular a una dırección en el espacıo trıdımensıonal definıda por un vector unıtarıo v

$$\mu_{//} = \frac{1}{2}(\mu + f(\mu)) \qquad \mu_{\perp} = \frac{1}{2}(\mu - f(\mu))$$

Donde

$\mu_{//}$ Es paralela a v y $\mu_{\perp}$ es perpendıcular a v y $\mu = \mu_{//v} + \mu_{\perp}$

Demostración

Por el **Teorema 2 6 1** $f(\mu)$ es la reflexıón de μ en la lınea definıda por v cómo se muestra en la figura 1 Cuando μ es sumado a esta reflexión las componentes de cada perpendıcular a v se cancelan y las componentes paralelas a v se suman para dar dos veces el resultado establecıdo por lo que es necesarıo el factor $\frac{1}{2}$ De ıgual forma la mıtad de la dıferencıa entre μ y su reflexıón da la componente de μ perpendıcular a v

El Teorema 2 8 1 puede ser generalızado a cuaternıones lo mısmo que a vectores Como la parte escalar de un cuaternıon es ınvarıante bajo una ınvolucıón la componente del cuaternıon paralela a v ıncluye la parte escalar así como la componente de la parte vectorıal paralela a v

En otras palabras la componente paralela del cuaternión es aquella componente que esta en el mismo plano de Argand como el eje de involución v La componente del cuaternión perpendicular a v es un vector (la componente de la parte vectorial perpendicular a v y por tanto perpendicular a el plano de Argand de la componente paralela) ya que la sustracción cancela la parte escalar Como se estableció anteriormente la representación $a + \mu b$ es independiente del sistema de coordenadas en que se expresa el cuaternión en términos de la direccion en un espacio R^3 de la parte vectorial

Sin embargo el cuaternión puede reescribirse en términos de un conjunto de vectores de bases ortogonales v_1 v_2 y v_3 sin recurrir a una representación numérica

Las tres proyecciones a través de v_1 v_2 y v_3 y el conjugado anti involución proporcionan el mecanismo esto es podemos escribir un cuaternión

$q = a + b\mu = a + b$ b

como

$$q = a + v_1 \propto + v_2 \beta + v_3 \gamma = a + b_1 + b_2 + b_3$$

donde

$b_i \parallel v_i$ y $\propto$ β y γ son numeros reales

$$a = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \qquad b = \frac{1}{2}(q - \bar{q}) \qquad bi = \frac{1}{2}\left(b + f_{v_i}(b)\right) \; i \in \{1\ 2\ 3\}$$

2 9 Representación Matricial de Cuaterniones

Existen al menos dos formas de representar cuaterniones como matrices de tal forma que la adicion y multiplicación de cuaterniones corresponda a la de matriz adición y matriz multiplicación (o sea homomorfismos de cuaternión matriz)

La primera forma es utilizar matrices complejas de dimensión 2x2 donde el cuaternión $q = a + bi + cj + dk$ puede ser representado como

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

Donde z y w son numeros complejos a b c y d son reales y $\bar{z}$ es el complejo conjugado de z Esta representación tiene las siguientes propiedades

- Los numeros complejos (c = d = 0) corresponden a matrices diagonales
- La norma de un cuaternion es la raíz cuadrada del determinante de la matriz correspondiente
- El conjugado de un cuaternión corresponde al conjugado de la traspuesta de la matriz
- En esta representación todos los numeros complejos son matrices que sólo tienen componentes reales

Como representación matricial alternativa tenemos la que utiliza como bases las matrices 2x2 siendo los cuaterniones combinaciones lineales de las mismas

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & -\imath \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & \imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}$$

De forma que $I \;\; J \;\; y \;\; K$ son las tres soluciones de la ecuación matricial

$X^2 = -U$ cumpliéndose las siguientes igualdades

$$I^2 = -U \qquad J^2 = -U \qquad K^2 = -U$$

Por lo tanto $I \;\; J \;\; y \;\; K$ pueden ser consideradas como las raíces negativas de la matriz unidad

La segunda forma de representar un cuaternión es utilizar matrices reales 4x4 así el mismo cuaternión $q = a + b\imath + c\jmath + dk$ puede ser escrito como

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En esta representación el conjugado de un cuaternión corresponde a la traspuesta de la matriz La cuarta potencia del valor absoluto de un cuaternión es el determinante de la correspondiente matriz

CAPITULO III

SISTEMAS DE FUNCIONES LINEALES DE CUATERNIONES

En este capítulo abordaremos la reducción y manipulación de sistemas de funciones lineales de cuaterniones Para este fin se probarán dos resultados importantes el primero indica que cuando una función general de cuaternión lineal contiene un numero arbitrario de términos esta puede reducirse siempre a lo más a cuatro términos Esta función reducida llamada la forma canonica cuaternaria de la función está completamente especificada con una 4-tupla de cuaterniones Segundo las combinaciones en series (composición de cascada) y paralelo (suma ponderada) de tales funciones canónicas pueden escribirse directamente en forma canónica sin recurrir a los anteriores métodos de reducción Las funciones de cuaterniones lineales una vez reducidas a la forma canonica pueden ser mantenidas en esta forma bajo la composición funcional Además la operación composición es simbólicamente idéntica a la multiplicación de cuaterniones mediante manipulación y reducción de sistemas de funciones lineales de cuaterniones

3 1 Introduccion

Las funciones lineales reales toman la forma mono-nomial

$f(x) = mx$ donde $m\ x \in \mathbb{R}$ Contrariamente la función general de cuaternión lineal tiene una forma multi-nomial

$$f(q) = \sum_{p=1}^{p} m_p\, q\, n_p \qquad (1)$$

Donde todos los factores son cuaterniones valorados o sea $q\ m_p\ n_p \in \mathbb{H}$ El numero de términos en la sumatoria puede ser muy grande debido a que la multiplicación de cuaterniones es no conmutativa

Este trabajo esta dirigido a la reduccion de sistemas o redes de tales funciones formadas por sumas ponderadas de escalares y composicion funcional El numero de términos monomiales en tales sistemas rápidamente se vuelve intratable

Dos metodos de reduccion son claves para llevar a cabo este objetivo Primero es la conversión de funciones generales de cuaterniones lineales como la dada en la ecuación (1) en a lo más una forma 4 tupla Se debe demostrar que la ecuacion (1) puede reducirse siempre a la forma

$$f(q) = Aq + Bq\imath + Cqj + Dqk \qquad (2)$$

donde A B C D $\in \mathbb{H}$ y $\imath$ $\jmath$ k son los operadores estandar hiperclomplejos Las funciones de cuaterniones lineales de este tipo se dice que están en la forma **canónica cuaternaria**

Así como un cuaternión puede ser asociado con una 4 tupla de números reales como

$a1 + b\imath + c\jmath + dk \Leftrightarrow (a\ b\ c\ d)$

así mismo la funcion lineal canónica puede ser asociada con una 4 tupla de cuaterniones como

$$Aq + Bq\imath + Cq\jmath + Dqk \Leftrightarrow \{A\ B\ C\ D\}$$

La 4 tupla de cuaterniones será usada como una notación abreviada para la forma canónica

3 2 Combinaciones Series y Paralelo

La suma lineal de dos de tales funciones digamos f_1 y f_2 es inmediatamente reducible a la forma canónica esto es

$$f_1(q) = A_1q + B_1qi + C_1qj + D_1qk$$

$$f_2(q) = A_2q + B_2qi + C_2qj + D_2qk$$

Entonces

$$f_1(q) + f_2(q) = A_3q + B_3qi + C_3qj + D_3qk$$

donde

$$A_3 = A_1 + A_2 \quad B_3 = B_1 + B_2 \quad C_3 = C_1 + C_2 \quad D_3 = D_1 + D_2$$

La composición de dos funciones lineales $f_2(f_1(q))$ esta dada por

$$f_2(f_1(q)) = A_3q + B_3qi + C_3qj + D_3qk$$

Donde

$$A_3 = A_2A_1 - B_2B_1 - C_2C_1 - D_2D_1$$

$$B_3 = A_2B_1 + B_2A_1 - C_2D_1 + D_2C_1$$

$$C_3 = A_2C_1 + B_2D_1 + C_2A_1 - D_2B_1$$

$$D_3 = A_2D_1 - B_2C_1 + C_2B_1 + D_2A_1$$

El examen cuidadoso de esta regla de composición revela que esta tiene la misma estructura que la multiplicación estándar de cuaterniones ya que la composición de funciones es no conmutativa

$$f_2(f_1(q)) \neq f_1(f_2(q))$$

Sin embargo la composición funcional de dos de tales funciones se expande o desarrolla naturalmente en dieciséis términos lo cual requiere volver a reducir a cuatro términos El numero de terminos en composiciones multiples se expande exponencialmente

El segundo método de reduccion proporciona una regla de composición simple la cual automáticamente produce una forma cuaternaria siempre que las dos funciones por componer estén ya en esta forma

La motivacion detras de este trabajo esta en el uso de arreglos de funciones lineales de cuaterniones como operaciones de filtros sobre arreglo de datos en cuaterniones valorados

Esto permite operaciones geométricas complejas sobre conjuntos de datos de tres y cuatro dimensiones Sólo después que la manipulación básica de sistemas de tales funciones es detallada puede ser resuelto el problema más difícil de filtros de cuaterniones lineales

3 3 Homomorfismo Cuaternión Matriz

Las representaciones de cuaternión matriz no son unicas Usando las reglas del producto del operador hipercomplejo el cuaternión producto de dos cuaterniones arbitrarios q $p \in \mathbb{H}$ escritos en forma cartesiana como

$$p = po + p_1 i + p_2 j + p_3 k$$

$$q = q_o + q_1 i + q_2 j + q_3 k$$

es

$$r_0 = p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3$$

$$r_1 = p_1q_0 + p_0q_1 - p_3q_2 + p_2q_3$$

$$r_2 = p_2q_0 + p_0q_2 + p_3q_1 - p_1q_3$$

$$r_3 = p_3q_0 + p_0q_3 - p_2q_1 + p_1q_2$$

donde $r = pq = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k$

Agrupando términos en la notación matriz – vector obtenemos dos productos distintos de matriz vector La forma estándar

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

la cual preserva el orden del producto y la forma transmutada

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

la cual invierte el orden

Sea la forma estándar de la matriz denotada por [p] y la forma transmutada de la matriz como $[p]^\dagger$ donde †"significa transposición de la sub-matriz inferior derecha 3 x 3

En el cuaternion producto $r = p\,q$ si consideramos a p como un operador a izquierda sobre el estado variable q entonces el p-operador es codificado como una matriz real 4 x 4 y el q-estado como un vector columna real 4x1 Inversamente si q es considerado como un operador a derecha sobre el estado variable p entonces el operador es otra vez codificado como una matriz real (transmutada a la izquierda) y el estado como un vector real

3 4 Operadores Cuaternion

Puesto que la multiplicacion de cuaterniones a izquierda y derecha son unicas podemos reconocer varias combinaciones como operadores independientes

Se puede definir una notación operador barra para proporcionar una representación abreviada para estas combinaciones

El operador barra denotado $e_1|e_2$ está definido como

$e_1|e_2\ (q) \longrightarrow e_1\,(q)\,e_2$ donde $e_n \in \{1\ i\ j\ k\}$

Por tanto existen dieciséis de tales operadores como los listados abajo en forma tabular

$1\|1$	$1\|i$	$1\|j$	$1\|k$,
$i\|1$	$i\|i$	$i\|j$	$i\|k$
$j\|1$	$j\|i$	$j\|j$	$j\|k$
$k\|1$	$k\|i$	$k\|j$	$k\|k$

Estos operadores cuaternion son consistentes con los operadores estándar hipercomplejos y tienen formulas similares a estos operadores

$$(\imath|1)^2 = (\jmath|1)^2 = (k|1)^2 = (\imath|1)(\jmath|1)(k|1) = -1|1$$

$$(1|\imath)^2 = (1|\jmath)^2 = (1|k)^2 = (1|i)(1|\jmath)(1|k) = -1|1$$

De modo que varias ecuaciones de operadores pueden ser manipuladas directamente por ejemplo

$$(\imath|\jmath)\,(\jmath|k) = (\imath\jmath|k\jmath) = -\,(k|\imath)$$

Usando los homomorfismos de una matriz estándar y transmutada dada en la sección anterior esto es $e_1|e_2 \longrightarrow [e_1][e_2]^{\dagger}$ cada una puede ser escrita como una matriz

Por ejemplo

$$(k|i) \longrightarrow [k][\imath]^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las formulas básicas del operador cuaternión pueden ser extendidas para formar combinaciones lineales ponderadas La linealidad de las operaciones con cuaternión implica que para cuatro cuaterniones arbitrarios A B C D $\in \mathbb{H}$ escritos en forma componente como

$$A = \propto_o + \propto_1 \imath + \propto_2 \jmath + \propto_3 k$$

$$B = \beta_o + \beta_1 \imath + \beta_2 \jmath + \beta_3 k$$

$$C = \gamma_o + \gamma_1 \imath + \gamma_2 \jmath + \gamma_3 k$$

$$D = \delta_o + \delta_1 \imath + \delta_2 j + \delta_3 k$$

Cuando son combinados con cuatro operadores $1|1$ $1|\imath$ $1|\jmath$ y $1|k$ respectivamente forman los cuatro operadores extendidos

$$(A|1) = \propto_o (1|1) + \propto_1 (\imath|1) + \propto_2 (\jmath|1) + \propto_3 (k|1)$$
$$(B|\imath) = \beta_o (1|\imath) + \beta_1 (\imath|\imath) + \beta_2 (\jmath|\imath) + \beta_3 (k|\imath)$$
$$(C|\jmath) = \gamma_o (1|\jmath) + \gamma_1 (\imath|\jmath) + \gamma_2 (\jmath|\jmath) + \gamma_3 (k|\jmath)$$
$$(D|k) = \delta_o (1|k) + \delta_1 (\imath|k) + \delta_2 (\jmath|k) + \delta_3 (k|k)$$

En el caso estándar los cuaterniones ± 1 $\pm\imath$ $\pm\jmath$ y $\pm k$ forman un grupo no abeliano de orden ocho con la multiplicación como el grupo operador En el caso del operador cuaternión estos serian $\pm\ 1|1$ $\pm\ 1|\imath$ $\pm\ 1|\jmath$ $\pm\ 1|k$ $\imath|1$ $\pm\ \jmath|1$ y $\pm\ k|1$ dando un grupo de orden 14 con la composición como grupo operador

También es interesante notar que usando el cuaternion operador barra en conjunto con la conjugación se obtiene un conjugado generalizado

$$\bar{q}^{\varepsilon} \rightarrow -\varepsilon\bar{q}\varepsilon \qquad \varepsilon \in \{\imath \ \ \jmath \ \ k\}$$

Para cualquier $q \in \mathbb{H}$ los cuales son involuciones segun las definiciones dadas en el capítulo II El conjugado de estas funciones

$$\bar{\bar{q}}^{\varepsilon} \rightarrow -\varepsilon q\varepsilon \qquad \varepsilon \in \{\imath \ \ \jmath \ \ k\}$$

Son anti involuciones

Para cualquier cuaternión arbitrario $q = q_0 + \imath q_1 + \jmath q_2 + k q_3$ se cumplen las siguientes identidades en terminos de involuciones

$$q_1 = \frac{1}{2}(\bar{q}^{\imath} - q)\imath$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(\bar{q}^{\jmath} - q)\jmath \qquad (5)$$

$$q_3 = \frac{1}{2}(\bar{q}^{k} - q)k$$

Las cuales son análogas a la fórmula para obtener la parte escalar de un cuaternión usando el conjugado estándar

$$q_0 = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \qquad (6)$$

Se debe señalar que todas estas funciones (conjugado generalizado y funciones parte componente) son rápidamente colocadas en forma cuaternaria lo cual se logra expresando primero el cuaternión conjugado estándar en forma involutoria esto es

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(-q + \imath q \imath + \jmath q \jmath + k q k)$$

Por tanto esta 4 – tupla canónica es $\bar{q} = \{-\frac{1}{2}\ \frac{\imath}{2}\ \frac{\jmath}{2}\ \frac{k}{2}\}$

3 5 Reducción a la forma Canónica

3 5 1 Método de la Matriz

En el fondo el método de la matriz es el proceso de tomar un operador matriz arbitrario y convertir este a la suma de cuatro operadores matrices cada matriz equivalente a un operador cuaternión

El homomorfismo matriz cuaternión de la seccion 3 3 sugiere que los términos individuales en la ecuación (1) pueden ser convertidos en forma de matriz como

$$m_p\,(q\,n_p) \longrightarrow [m_p]\left([n_p]^{\dagger}\vec{q}\right) = [m_p][n_p]^{\dagger}\,\vec{q}$$

Donde $\vec{q}$ denota la forma estado-vector del cuaternión q

Si se desea una reducción numérica del problema entonces la siguiente ecuación matriz podría ser usada

$$f(q) \longrightarrow \left\{\sum_{p=1}^{p}[m_p][n_p]^{\dagger}\right\}\vec{q}$$

Aun cuando el 4 vector resultante represente un cuaternión las matrices intermedias $[m_p][n_p]^{\dagger}$ no pueden ser codificadas en un cuaternion unico equivalente ya que en general este no tiene la forma correcta de elementos Una matriz real general 4x4 tiene dieciséis grados de libertad mientras que un cuaternión tiene solo cuatro (sea que esté o no en forma de matriz) Por tanto las matrices reales arbitrarias no pueden estar escritas como un cuaternión unico

Sin embargo estas pueden ser escritas como la suma directa de cuatro matrices cada matriz equivalente a un cuaternión

Sean A B C D $\in \mathbb{H}$ definidas como

$$A = \alpha_0 + \alpha_1\, i + \alpha_2\, j + \alpha_3\, k$$

$$B = \beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3\, k$$

$$C = \gamma_0 + \gamma_1 i + \gamma_2 j + \gamma_3\, k$$

$$D = \delta_0 + \delta_1 i + \delta_2 j + \delta_3\, k$$

Entonces cada uno de los cuaterniones anteriores contiene cuatro grados de libertad Por esto la ecuación combinada

$$(A|1) + (B|\imath) + (C|\jmath) + (D|k)$$

tiene un total de dieciséis el numero necesario para codificar una matriz arbitraria 4x4

Escribiendo cada operador cuaternión en forma de matriz como

$$(A|1) \longrightarrow [A][1]^{\dagger} = \begin{bmatrix} \propto_0 & -\propto_1 & -\propto_2 & -\propto_3 \\ \propto_1 & \propto_0 & -\propto_3 & \propto_2 \\ \propto_2 & \propto_3 & \propto_0 & -\propto_1 \\ \propto_3 & -\propto_2 & \propto_1 & \propto_0 \end{bmatrix}$$

$$(B|\imath) \longrightarrow [B][\imath]^{\dagger} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & -\beta_0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ \beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ \beta_3 & -\beta_3 & \beta_1 & \beta_0 \\ -\beta_2 & -\beta_3 & -\beta_0 & \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$(C|\jmath) \longrightarrow [C][\jmath]^{\dagger} = \begin{bmatrix} -\gamma_2 & -\gamma_3 & -\gamma_0 & \gamma_1 \\ -\gamma_3 & \gamma_2 & -\gamma_1 & -\gamma_0 \\ \gamma_0 & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$(D|k) \longrightarrow [D][k]^{\dagger} = \begin{bmatrix} -\delta_3 & \delta_2 & -\delta_1 & -\delta_0 \\ \delta_2 & \delta_3 & \delta_0 & -\delta_1 \\ -\delta_1 & -\delta_0 & \delta_3 & -\delta_2 \\ \delta_0 & -\delta_1 & -\delta_2 & -\delta_3 \end{bmatrix}$$

Entonces el operador combinado en forma de matriz es

$$(A|1)+(B|\imath)+(C|\jmath)+(D|k)\longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 -\beta_1-\gamma_2-\delta_3 & -\alpha_1 -\beta_0-\gamma_3+\delta_2 & -\alpha_2 +\beta_3-\gamma_0-\delta_1 & -\alpha_3 -\beta_2+\gamma_1-\delta_0 \\ \alpha_1 +\beta_0-\gamma_3+\delta_2 & \alpha_0 -\beta_1+\gamma_1+\delta_3 & -\alpha_3 -\beta_2-\gamma_1+\delta_2 & \alpha_2 -\beta_3-\gamma_0-\delta_1 \\ \alpha_2 +\beta_3+\gamma_0-\delta_1 & \alpha_3 -\beta_2-\gamma_1-\delta_0 & \alpha_0 +\beta_1-\gamma_2+\delta_3 & -\alpha_1 +\beta_0-\gamma_3-\delta_2 \\ \alpha_3 -\beta_2+\gamma_1+\delta_0 & -\alpha_2 -\beta_3+\gamma_0-\delta_1 & \alpha_1 -\beta_0-\gamma_3-\delta_2 & \alpha_0 +\beta_1+\gamma_2-\delta_3 \end{bmatrix}$$

Haciendo esto igual a una matriz arbitraria R con elementos $\{r_{ij}\}$ y resolviendo para las componentes de los cuaterniones encontramos

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}+r_{11}+r_{22}+r_{33}+r_{44}\\ +r_{21}-r_{12}+r_{43}-r_{34}\\ +r_{31}-r_{13}-r_{42}+r_{24}\\ +r_{41}-r_{14}+r_{32}-r_{23}\end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$B=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}+r_{21}-r_{12}-r_{43}-r_{34}\\ -r_{11}-r_{22}+r_{33}+r_{44}\\ -r_{41}-r_{14}-r_{32}-r_{23}\\ +r_{31}+r_{13}-r_{42}-r_{24}\end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$C=\begin{bmatrix}\gamma_0\\ \gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}+r_{31}-r_{13}+r_{42}-r_{24}\\ +r_{41}+r_{14}-r_{32}-r_{23}\\ -r_{11}+r_{22}-r_{33}+r_{44}\\ -r_{21}-r_{12}-r_{43}-r_{34}\end{bmatrix} \qquad (9)$$

y

$$D=\begin{bmatrix}\delta_0\\ \delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}+r_{41}-r_{14}-r_{32}+r_{23}\\ -r_{31}-r_{13}-r_{42}-r_{24}\\ +r_{21}+r_{12}-r_{43}-r_{34}\\ -r_{11}+r_{22}+r_{33}-r_{44}\end{bmatrix} \qquad (10)$$

Esto no es tan difícil como parece ya que el problema se descompone en cuatro conjuntos de cuatro incógnitas con cada conjunto independiente de los otros o sea el conjunto de coeficientes $\{\propto_0\ \beta_1\ \gamma_2\ \delta_3\}$ se resuelve usando sólo los términos de la diagonal en ambas matrices

Los pasos para reducir la ecuación (1) a la forma cuaternaria son

1 Transformar los coeficientes m_p y n_p al espacio de matrices usando las ecuaciones (3-4)

$$m_p \longrightarrow [m_p] \qquad n_p \longrightarrow [n_p]^{\dagger}$$

2 Construir la matriz unica R como

$$R = \sum_{p=1}^{P} [m_p][n_p]^{\dagger}$$

3 Construir los factores de cuaternión equivalente usando las ecuaciones (7 10)

$$R \longrightarrow (A|1) + (B|i) + (C|j) + (D|k)$$

Ejemplo 1

Vamos a utilizar el método de la matriz para reducir

$$R(q) = 1qi\ +\ jqk\ +\ jqi\ +\ kqk\ +\ kqi$$

A la suma de cuatro operadores matrices cada matriz equivalente a un operador cuaternión con $q = (1\ 0\ 2\ 1)$ Luego entonces definimos

$$R(q) = ([1][i]^{\dagger}\ +\ [j][k]^{\dagger}\ +\ [j][i]^{\dagger}\ +\ [k][k]^{\dagger}\ +\ [k][i]^{\dagger})\vec{q}$$

Ahora vamos a escribir cada operador cuaternión en forma de matriz tal que

$$[1][i]^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \ [j][k]^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \ [j][i]^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \ [k][k]^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$+ \ [k][i]^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego podemos definir la matriz R como $R = \sum_{p=1}^{p}[m_p][n_p]^{\dagger}$ tal que

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{luego} \quad R(\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos construir los factores de cuaternion equivalente mediante las ecuaciones (7 10)

$$A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & -1 \\ 2 & -0 & -2 & -0 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -0 & +2 & -0 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & +1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & +2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad D = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & +1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 \\ 2 & 0 & +2 & 0 \\ 1 & +1 & +1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Así los factores cuaterniones son los siguientes

$A = (0\,0\,0\,0)$ $\quad B = (1\,0\,1\,1)$ $\quad C = (0\,0\,0\;\,0)$ $\quad D = (0\,0\,1\,1)$

Por tanto $R = (B|\imath) + (D|k)$

3 6 Método de Involución

El método de matriz equivalente descrito arriba es usual para calculos numericos sin embargo este requiere manipulación en el nivel de las componentes de cada cuaternión m_p y n_p

El Método de involución descrito en esta seccion provee una solucion alternativa en términos de m_p y n_p directamente sin estas referencias explicitas haciendo este mas adecuado para el análisis simbólico

Empezando con la ecuación (1) sea cada n_p expandido en forma de componente como $n_p = w_p + x_p\imath + y_p\jmath + z_pk$

Entonces la ecuación completa puede ser expandida como

$$f(q) = \textstyle\sum_{p=1}^{p} m_p\, q\, \left(w_p + x_p\imath + y_p\jmath + z_pk\right)$$

$$= \sum_{p=1}^{p} m_p\, w_p\, q + \sum_{p=1}^{p} m_p\, x_p\, q\imath + \sum_{p=1}^{p} m_p\, y_p\, qj + \sum_{p=1}^{p} m_p\, z_p\, qk$$

$$= \left[\sum_{p=1}^{p} m_p\, w_p\right] q + \left[\sum_{p=1}^{p} m_p x_p\right] q\imath + \left[\sum_{p=1}^{p} m_p\, y_p\right] q\,\jmath + \left[\sum_{p=1}^{p} m_p\, z_p\right] qk$$

Ahora sean

$$A = \sum_{p=1}^{p} m_p\, w_p \qquad B = \sum_{p=1}^{p} m_p\, x_p$$

$$C = \sum_{p=1}^{p} m_p \; y_p \qquad\qquad D = \sum_{p=1}^{p} m_p \; z_p$$

tales que

$$f(q) = A\,q + B\,q\,\imath \; + \; C\,q\,\jmath \; + \; D\,q\;k$$

El problema con esta formula es que requerimos descomponer cuaterniones n_p en forma de componentes por tanto buscamos una fórmula que no requiera este paso

La respuesta a este problema es aplicar las formulas de involucion (5-6) Particularmente sean

$$w_p = \frac{1}{2}\left(n_p + \bar{n}_p\right) \qquad x_p = \frac{1}{2}\left(\bar{n}^{i}{}_{p} - n_p\right)\imath$$

$$y_p = \frac{1}{2}\left(\bar{n}_p^{j} - n_p\right)\jmath \qquad z_p = \frac{1}{2}\left(\bar{n}_p^{k} - n_p\right)k$$

tales que

$$A = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p} m_p\left(\bar{n}_p + n_p\right) \qquad\qquad B = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p} m_p\left(\bar{n}_p^{i} - n_p\right)\imath$$

$$C = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p} m_p\left(\bar{n}_p^{j} - n_p\right)\jmath \qquad\qquad D = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p} m_p\left(\bar{n}_p^{k} - n_p\right)k$$

Ejemplo 2

Vamos a ilustrar el método de la involución para lo cual utilizaremos el mismo problema usado en el método de la matriz de este modo podremos comparar los resultados y verificar la fiabilidad de ambos métodos

Sea

$$R(q) = 1qi + jqk + jqi + kqk + kqi$$

$m_1 = 1$ $\quad n_1 = i$ $\quad n_1 = (0\,1 + 1\,i + 0\,j + 0\,k)$

$m_2 = j$ $\quad n_2 = k$ $\quad n_2 = (0\,1 + 0\,i + 0\,j + 1\,k)$

$m_3 = j$ $\quad n_3 = i$ $\quad n_3 = (0\,1 + 1\,i + 0\,j + 0\,k)$

$m_4 = k$ $\quad n_4 = k$ $\quad n_4 = (0\,1 + 0\,i + 0\,j + 1\,k)$

$m_5 = k$ $\quad n_5 = i$ $\quad n_5 = (0\,1 + 1\,i + 0\,j + 0\,k)$

Aplicando las formulas de involución tenemos

$A = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p} m_p(\bar{n}_p + n_p)$

$= (1\,0 + j\,0 + j\,0 + k\,0 + k\,0)$

$A = (0\;0,0\;0)$

$B = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p} m_p(\bar{n}_p^i - n_p)\,i$

$= (1\,1 + j\,0 + j\,1 + k\,0 + k\,1)$

$B = (1,0,1,1)$

$C = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p} m_p\left(\bar{n}_p^j - n_p\right)$

$C = (1\,0 + j\,0 + j\,0 + k\,0 + k\,0)$

$C = (0\;0\;0\;0)$

$D = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p} m_p(\bar{n}_p^k - n_p)\,k$

$D = (1\,0 + j\,1 + j\,0 + k\,1 + k\,0)$

$D = (0\;0\;1\;1)$

Como se puede observar los factores cuaterniones $A\ B\ C\ D$ son los mismos que los obtenidos en el método de la matriz

3 7 Sistema de Reducción

Uno podría usar los métodos de la sección anterior para reducir composiciones de dos funciones lineales donde $(f_2 \circ f_1)(q) = f_2(f_1(q)) = f_1(q)f_2(q)$ Lo que no es evidente es que la composición funcional puede ser reducida en una forma más elegante Esta alternativa se presta en sí misma para conocer mejor lo que sucede en estas composiciones de operaciones

Usando la notación operador barra la composición se reduce a la multiplicación ordenada por tanto se construye una tabla de composición mostrando como las componentes de las funciones compuestas son reducidas

La tabla de composición para $f_2\ o\ f_1$ está dada de la siguiente manera

$f_2\ o\ f_1$	$A_1\|1$	$B_1\|\imath$	$C_1\|\jmath$	$D_1\|k$
$A_2\|1$	$+A_2 A_1\|1$	$+A_2 B_1\|\imath$	$+A_2 C_1\|\jmath$	$+A_2 D_1\|k$
$B_2\|\imath$	$+B_2 A_1\|\imath$	$-B_2 B_1\|1$	$-B_2 C_1\|K$	$+B_2 D_1\|\jmath$
$C_2\|\jmath$	$+C_2 A_1\|\jmath$	$+C_2 B_1\|K$	$-C_2 C_1\|1$	$-C_2 D_1\|\imath$
$D_2\|k$	$+D_2 A_1\|K$	$-D_2 B_1\|\jmath$	$+D_2 C_1\|i$	$-D_2 D_1\|1$

Reuniendo terminos semejantes encontramos que

$$f_2\ o\ f_1(q) = A_3\, q\ +\ B_3\, q\, \imath\ +\ C_3\, q\, \jmath\ +\ D_3\, q\, k$$

donde

$$A_3 = A_2A_1 - B_2B_1 - C_2C_1 - D_2D_1$$

$$B_3 = A_2B_1 + B_2A_1 - C_2D_1 + D_2C_1$$

$$C_3 = A_2C_1 + B_2D_1 + C_2A_1 - D_2B_1$$

$$D_3 = A_2D_1 - B_2C_1 + C_2B_1 + D_2A_1$$

Un examen cuidadoso de la 4-tupla resultante de un producto de dos cuaterniones en comparación con la 4-tupla resultante de la composición funcional de dos ecuaciones canónicas revela que ellas son versiones transmutadas de la misma fórmula operacional Esta es una consecuencia de que los operadores barra tienen una formula operador similar a la formula del operador estándar hipercomplejo

Si la forma canónica ha sido definida con los cuaterniones completos a la derecha o sea

$$f(q) = q\,A \;+\; \imath\, q\, B \;+\; \jmath\, q\, C \;+\; k\, q\, D$$

entonces la formula de composición podria ser identica a la fórmula de la multiplicación de cuaterniones

CONCLUSIONES

- Una caracterización de las involuciones es que dejan invariante la parte escalar del cuaternión y reflejan la parte vectorial en el eje de involucion
- Mientras que en los complejos hay una sola involucion que es el conjugado en los cuaterniones existen infinitas involuciones
- Un conjunto de tres involuciones mutuamente perpendiculares además de ser cerrada bajo la composición de involuciones es una identidad
- En el método de la reducción matricial siempre se puede reducir una función de la forma $f(q) = \sum_{p=1}^{p} m_p \, q \, n_p$ transformando los términos individuales $m_p \longrightarrow [m_p]$ y $n_p \longrightarrow [n_p]^{\dagger}$ luego realizar estos productos para obtener una matriz R con elementos $\{r_{ij}\}$ donde cada matriz $[r_{ij}]$ determina un factor cuaternión
- El método de matriz equivalente es usual para calculos numéricos sin embargo este requiere manipulación en el nivel de las componentes de cada cuaternión m_p y n_p
- El Método de involución provee una solución alternativa en términos de m_p y n_p directamente haciendo este más adecuado para el análisis simbólico

BIBLIOGRAFIA

1 KLEINER I A History of Abstract Algebra Editorial Birkhauser Toronto Canada 2007

2 DERBYSHIRE J Unknown Quantity A Real and Imaginary History of Algebra Editorial Joseph Henry Press Washington D C 2006

3 SHOEMAKE K Quaternions Department of Computer and Information Science University of Pennsilvania www mathworld wolfram com Philadelphia 1 985

4 BOYER C B Historia de la Matemática Alianza Editorial Madrid España 1994

5 MARSDEN J E y TROMBA A J Calculo Vectorial Editorial Pearson Educación Madrid España 2004

6 GUTIERREZ S Hamilton La Liberación del Álgebra Revista SUMA 49 pp 95-99 Valencia España junio 2005

7 McBREEN M "The Birth of Quaternions McGill Mathematics Magazine pp 39-41